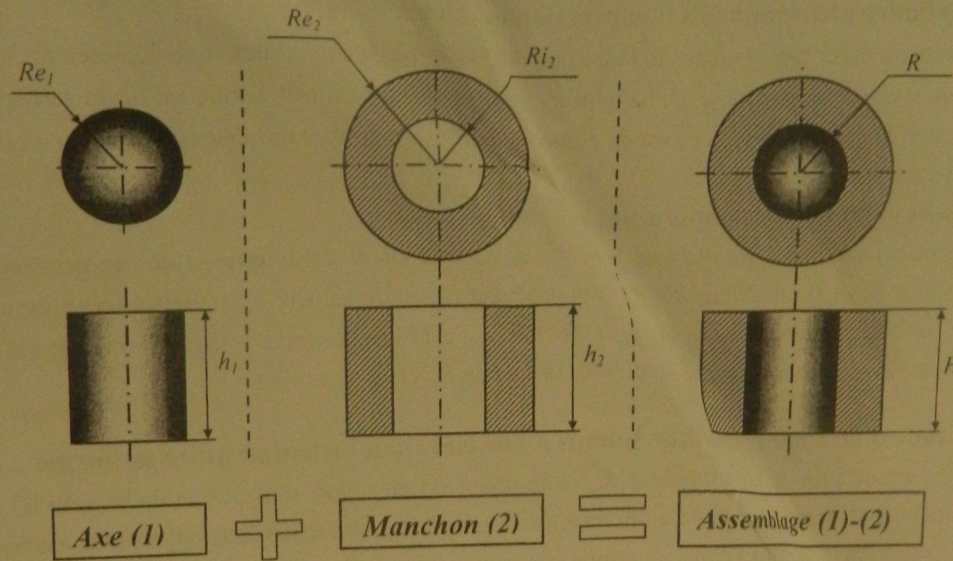


**Problème : Etude d'un assemblage forcé**

On se propose d'étudier dans ce problème l'assemblage d'un cylindre plein (1) (axe) de Rayon  $Re_1$  et de hauteur  $h_1$  avec un cylindre creux (2) (manchon) de rayon intérieur  $Ri_2$ , de rayon extérieur  $Re_2$  et de hauteur  $h_2$ . L'assemblage final est de hauteur  $H$  (voir figure ci-dessous).

L'assemblage est dit forcé lorsque le rayon  $Re_1$  de l'axe (1) est supérieur au rayon intérieur  $Ri_2$  du manchon (2).



Les matériaux constituant l'axe et le manchon sont identiques et supposés homogènes, isotropes et thermoélastiques linéaires de module d'Young  $E$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et de coefficient de dilatation thermique linéaire  $\alpha$ .

Dans tout le problème on suppose que les forces de volume sont négligeables et les hypothèses des petites perturbations sont vérifiées.

**Partie I : Calculs Préliminaires**

**I-1 Etude d'un tube cylindrique soumis à une pression intérieure et une pression extérieure**

Un tube cylindrique de section circulaire de rayon intérieur  $R_i$ , de rayon extérieur  $R_o$ , d'axe  $Oz$  et de hauteur  $h$ , est constitué d'un matériau homogène, isotrope et élastique linéaire. Le tube est soumis à une pression  $P_1$  appliquée sur sa surface intérieure  $S_{R1}$  et une pression  $P_2$  appliquée sur sa surface extérieure  $S_{R2}$ . La section  $S_0 (z=0)$  du tube est en contact sans frottement avec un plateau rigide immobile, sa section  $S_h (z=h)$  est libre.

1) Ecrire les conditions aux limites pour ce problème.

En cherchant pour ce problème d'équilibre une solution pour le champ de déplacements de la forme  $\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r + u_z(z)\vec{e}_z$ , la résolution des équations de Navier permet d'obtenir les solutions suivantes et il n'est pas demandé de les retrouver :

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}, \quad u_z(z) = Cz + D \quad \text{où } A, B, C, D \text{ sont des constantes} \quad (1).$$

- 2) Déterminer le champ de déformations associé au champ de déplacements (1).  
 3) En utilisant la loi de comportement élastique linéaire homogène et isotrope, montrer que le champ de contraintes est de la forme :

$$\sigma_{rr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2}, \quad \sigma_{zz} = c, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (2)$$

- 4) En exploitant les conditions aux limites, déterminer les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $D$  et montrer que :

$$a = \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad b = (P_1 - P_2) \frac{R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad c = 0, \quad D = 0 \quad (3)$$

Le calcul des constantes A, B et C conduit aux relations suivantes (Il n'est pas demandé de les retrouver) :

$$A = \frac{(1-\nu)}{E} a - \frac{\nu}{E} c, \quad B = \frac{(1+\nu)}{E} b, \quad C = \frac{c}{E} - 2\nu \frac{a}{E} \quad (4)$$

### I-2 Cylindre plein soumis à une pression extérieure

5) Dédire à partir des résultats de la partie I-1 les champs de contraintes et de déplacements dans un cylindre plein de rayon extérieur  $Re_1$  et de hauteur  $h_1$ , soumis à une pression  $P_2$  appliquée sur sa surface extérieure  $S_{Re_1}$ . La section  $S_0$  ( $z=0$ ) du cylindre est en contact sans frottement avec un plateau rigide immobile, sa section  $S_{h_1}$  ( $z=h_1$ ) est libre.

### I-3 Tube cylindrique soumis à une pression intérieure

6) Dédire à partir des résultats de la partie I-1 les champs de contraintes et de déplacements dans un tube cylindrique de rayon intérieur  $Ri_2$ , de rayon extérieur  $Re_2$  et de hauteur  $h_2$ , soumis à une pression  $P_1$  appliquée sur sa surface intérieure  $S_{Ri_2}$ , sa surface extérieure  $S_{Re_2}$  est libre. La section  $S_0$  ( $z=0$ ) du tube est en contact sans frottement avec un plateau rigide immobile, sa section  $S_{h_2}$  ( $z=h_2$ ) est libre.

### I-4 Etude d'un tube cylindrique soumis à une élévation de température uniforme

Un tube cylindrique de rayon intérieur  $Ri_2$  et de rayon extérieur  $Re_2$ , d'axe  $Oz$  et de hauteur  $h_2$ , est constitué d'un matériau homogène, isotrope et thermoélastique linéaire. La section  $S_0$  ( $z=0$ ) du tube est en contact sans frottement avec un plateau rigide immobile, sa section  $S_{h_2}$  ( $z=h_2$ ), ainsi que ses surfaces intérieure  $S_{Ri_2}$  et extérieure  $S_{Re_2}$  sont libres. Le tube est soumis à une élévation de température uniforme  $\tau$  par rapport à la température de référence.

7) La transformation du tube étant homogène, déterminer les champs de contraintes et de déplacements (constants dans la base des coordonnées cylindriques).

8) Le champ de déplacements est toujours de la forme :  $\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r + u_z(z)\vec{e}_z$ , montrer que :

$$u_r(r) = \alpha\tau r, \quad u_z(z) = \alpha\tau z$$

9) Dédire le rayon intérieur du tube  $Ri_2$  après déformation.

### partie II : Etude de l'assemblage de l'axe (1) avec le manchon (2)

Etant donné que le rayon de l'axe est supérieur au rayon intérieur du manchon ( $Re_1 > Ri_2$ ), pour permettre l'assemblage le manchon sera soumis à une élévation de température uniforme  $\tau_a$  rendant son rayon intérieur supérieur ou égal au rayon de l'axe.

On pose :  $Ri_2 = R_0$  rayon intérieur initial du manchon  
 $Re_1 = R_0 + \delta$  rayon initial de l'axe

10) Dédire à partir des résultats de la partie I-4, la valeur minimale  $\tau_0$  de l'élévation de température  $\tau_a$  qui permet d'assurer l'assemblage.

AN :  $Ri_2 = R_0 = 20 \text{ mm}$ ,  $Re_2 = 40 \text{ mm}$ ,  $\delta = 21 \mu\text{m}$ ,  $Re_1 = R_0 + \delta = 20.021 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 13 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$   
 (Cette application correspond à un ajustement de type H7p6 sur un diamètre de 40 mm pour lequel le serrage maximal :  $\delta = (Re_1)_{\text{Max}} - (Ri_2)_{\text{min}} = 21 \mu\text{m}$ )

L'axe, toujours à la température de référence, est monté dans le manchon; ce dernier est déjà porté à la température uniforme  $\tau_0$ . La section  $S_0 (z=0)$  de l'assemblage est en contact sans frottement avec un plateau rigide immobile.

Après refroidissement l'assemblage se trouve à la température uniforme de référence. On suppose que dans cet état l'axe et le manchon ont la même hauteur  $H$ . La section  $S_H (z=H)$  ainsi que la surface extérieure  $S_{Re2}$  sont libres.

L'axe et le manchon sont dans ce cas dans des états d'équilibre déformés dans lesquels l'interface axe-manchon est positionnée à un rayon d'équilibre  $R$  compris entre  $R_{i2}$  et  $R_{e1}$  ( $R_{i2} < R < R_{e1}$ ). Cette interface est le siège d'une pression de contact uniforme  $P$  exercée mutuellement par l'un des solides sur l'autre. Le contact entre l'axe et le manchon au niveau de l'interface est supposé sans frottement.

Ainsi le déplacement radial d'un point de la surface cylindrique de l'axe (1) est tel que :

$$u_r^{(1)}(R_{e1}) = R - R_{e1}$$

Alors que celui d'un point de la surface cylindrique intérieure du manchon (2) est tel que :

$$u_r^{(2)}(R_{i2}) = R - R_{i2}$$

- 11) A partir des résultats de la question 5), donner (en fonction de  $P$ ) les champs de contrainte et de déplacement qui règnent dans l'axe.
- 12) A partir des résultats de la question 6), donner (en fonction de  $P$ ) les champs de contrainte et de déplacement qui règnent dans le manchon.
- 13) En examinant les déplacements au niveau de l'interface, établir les équations qui permettent de calculer la pression mutuelle  $P$  et le rayon d'équilibre  $R$ . Montrer que :

$$P = \frac{(R_{e1} - R_{i2})(R_{e2}^2 - R_{i2}^2)}{(1-\nu)[R_{e1}(R_{e2}^2 - R_{i2}^2) + R_{i2}^3] + (1+\nu)R_{i2}R_{e2}^2} E ; \quad R = \frac{2R_{e1}R_{i2}R_{e2}^2}{(1-\nu)[R_{e1}(R_{e2}^2 - R_{i2}^2) + R_{i2}^3] + (1+\nu)R_{i2}R_{e2}^2}$$

Calculer les valeurs numériques de  $P$  et  $R$ .

A.N. :  $E=20\,000 \text{ daN/mm}^2$ ;  $\nu=0.3$ ,  $R_{e1}=20.021 \text{ mm}$ ,  $R_{i2}=20 \text{ mm}$ ,  $R_{e2}=40 \text{ mm}$

- 14) Comment choisir les hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  (en fonction de  $P$  et  $H$ ) pour qu'après assemblage, l'axe et le manchon aient la même hauteur  $H$ .
  - 15) Le matériau constituant l'axe et le manchon obéit au critère de Tresca pour la limite du comportement élastique avec une limite élastique en traction simple  $\sigma_e$ . Etudier la résistance de l'axe et du manchon vis-à-vis de la limite élastique suite à cette opération d'assemblage.
- A.N. :  $\sigma_e=240 \text{ MPa}$

**Barème approximatif :** 1) /2pts, 2) /1pt, 3) /1pt, 4) /2pts, 5) /1pt, 6) /1pt, 7) /1pt, 8) /1pt, 9) /1pt, 10) /2pts, 11) /1pt, 12) /1pt, 13) /2pts, 14) /1pt, 15) /2pts

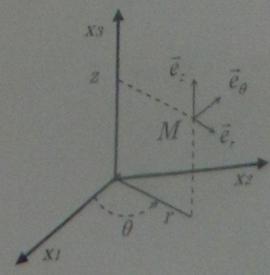
### -----Formulaire-----

#### A-Dérivation d'un champ de tenseurs en coordonnées cylindriques

Coordonnées d'un point  $M$ :  $(r, \theta, z)$

Vecteurs orthonormés associés:  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Vecteur position :  $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$



Gradient d'un champ scalaire:

$$\overline{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z$$

Gradient d'un champ vectoriel:

$$\overline{\text{grad}}(\bar{U}) = \overline{\nabla \bar{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) & \frac{\partial U_r}{\partial z} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) & \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Divergence d'un champ vectoriel:

$$\text{div}(\bar{U}) = \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Rotationnel d'un champ vectoriel:

$$\overline{\text{rot}}(\bar{U}) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \bar{e}_r + \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \bar{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \bar{e}_z$$

Divergence d'un champ de tenseur du second ordre symétrique:

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{\sigma}) &= \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \bar{e}_r \\ &+ \left( \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \right) \bar{e}_\theta \\ &+ \left( \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \right) \bar{e}_z \end{aligned}$$

## B- Thermoélasticité linéaire isotrope

Loi de comportement thermoélastique linéaire et isotrope:

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon} + \lambda \text{trace}(\bar{\varepsilon}) \bar{I} - 3K\alpha\tau \bar{I}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{I} + \alpha\tau \bar{I}$$

$$\text{avec } \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overline{\text{Grad}}(\bar{u}) + \overline{\text{Grad}}^T(\bar{u}) \right)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Critère de Tresca :

$$\sigma_{eq, Tresca} = \text{Sup}_{1 \leq i, j \leq 3; i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j|) < \sigma_e$$